Rombaldi (p743-745) RÉDUCTION DES ENDOMORPHISMES NORMAUX 151, 153, 154, 160

Soit $(E, \langle \cdot | \cdot \rangle)$ un espace euclidien de dimension n. On note $\|\cdot\|$ la norme associée à $\langle \cdot | \cdot \rangle$.
On dit que $u \in \mathcal{L}(E)$ est normal si $u \circ u^* = u^* \circ u$, où u^* est l'adjoint de u, i.e. l'unique endomorphisme de E vérifiant : $\forall (x,y) \in E^2$, $\langle u(x) | y \rangle = \langle x | u^*(y) \rangle$.
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$

Lemme 1 : Il existe un sous-espace vectoriel de E stable par u de dimension 1 ou 2.

Supposons désormais u normal.

Lemme 2 : Si F est un sous-espace vectoriel de E stable par u, alors $F^\perp$ est stable par u.

Lemme 3 : Il existe des sous-espaces vectoriels $P_1, \dots, P_r$ de E stables par u, de dimension 1 ou 2, tels que $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq r}^{\perp} P_i$.

Lemme 4 : Si $n = \dim(E) = 2$, alors :
- Si u a une valeur propre réelle, alors u est diagonalisable dans une base orthonormée.
- Sinon, pour toute base orthonormée $\mathcal{B}$ de E, il existe $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ tel que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix}$.

Thm (de réduction des endomorphismes normaux) : Il existe une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E dans laquelle, par blocs :

$$\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} D_p & & & & 0 \\ & R_1 & & & \\ & & R_2 & & \\ & & & \ddots & \\ 0 & & & & R_r \end{pmatrix}$$

⚠ Faute de frappe dans Rombaldi

où $D_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ est diagonale, et $\forall i \in [\![1, r]\!]$, $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$, $(a_i, b_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$ (et $p + 2r = n$).

Preuve du Lemme 1 : Si u admet une valeur propre λ réelle, alors pour tout $x \in E_\lambda(u) = \mathrm{Ker}(u - \lambda id_E)$ non nul (un vecteur propre associé à λ), $\mathbb{R}x$ est un sous-espace de dimension 1 stable par u.
Supposons que u n'a pas de valeur propre réelle. Dans ce cas, $\deg(\pi_u) \geq 2$ (car si $\pi_u(\lambda) = 0$, alors $\pi_u(\bar{\lambda}) = 0$, puisque E est réel donc $\pi_u \in \mathbb{R}[X]$), et la décomposition de π_u en produit d'irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$ ne fait intervenir que des trinômes de discriminant strictement négatif. Soit $X^2 + bX + c$ l'un d'entre eux, soit $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $\pi_u = (X^2 + bX + c) \cdot Q$. Par minimalité de π_u, comme $\deg(Q) < \deg(\pi_u)$, $Q(u) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$. De là, le fait que $(u^2 + bu + c\, id_E) \circ Q(u) = \pi_u(u) = 0_{\mathcal{L}(E)}$ impose que $u^2 + bu + c\, id_E$ n'est pas injectif ($Q(u) \neq 0_{\mathcal{L}(E)}$ donc il existe $x \in E$ tel que $Q(u)(x) \neq 0$, et $Q(u)(x) \in \mathrm{Ker}(u^2 + bu + c\, id_E)$). Soit $x \in \mathrm{Ker}(u^2 + bu + c\, id_E) \setminus \{0\}$, posons $P = \mathrm{Vect}(x, u(x))$.
Pour tout $\alpha x + \beta u(x) \in P$, $u(\alpha x + \beta u(x)) = \alpha u(x) + \beta u^2(x) = \alpha u(x) - \beta(bu(x) + cx) \in P$ donc P est stable par u. De plus, P est de dimension 2 car u n'a pas de valeur propre réelle (si $\dim(P) = 1$, alors $(x, u(x))$ est liée, et $x \neq 0$, donc x est un vecteur propre de u associé à une valeur propre réelle, ce qui est impossible). //

Preuve du Lemme 2 : Si $F=\{0\}$ ou $F=E$, alors $F^\perp=E$ ou $F^\perp=\{0\}$ et il n'y a rien à faire.
Soit F un sous-espace de E distinct de E et de $\{0\}$(*), stable par u (*: cela présuppose que $n=\dim(E)\geq 2$). Dans une base orthonormée de E adaptée à la décomposition $E=F\oplus F^\perp$, la matrice de u est de la forme (par blocs) $A=\begin{pmatrix}A_1 & A_2\\ 0 & A_3\end{pmatrix}$, et celle de u^* est ${}^tA=\begin{pmatrix}{}^tA_1 & 0\\ {}^tA_2 & {}^tA_3\end{pmatrix}$.
De là, u étant normal, on a $A\,{}^tA={}^tA\,A$, i.e. :

$$\begin{pmatrix}A_1{}^tA_1+A_2{}^tA_2 & *\\ * & *\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}{}^tA_1A_1 & *\\ * & *\end{pmatrix}$$

De là, $A_1{}^tA_1+A_2{}^tA_2={}^tA_1A_1$, mais $\mathrm{Tr}(A_1{}^tA_1)=\mathrm{Tr}({}^tA_1A_1)$, donc $\mathrm{Tr}(A_2{}^tA_2)=0$. Comme $(A,B)\longmapsto \mathrm{Tr}(A{}^tB)$ est un produit scalaire sur $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, on en déduit que $A_2=0$, et donc que $A=\begin{pmatrix}A_1 & 0\\ 0 & A_3\end{pmatrix}$ et $F^\perp$ est stable par u. //

Preuve du Lemme 3 : On procède par récurrence sur $n=\dim(E)\geq 1$:
- Pour $n=1$ ou $n=2$, c'est immédiat.
- Soit $n\geq 2$, supposons le résultat prouvé pour tout endomorphisme normal(*) d'un espace euclidien de dimension $\leq n$. (*: attention à bien distinguer les notions d'application restreinte et d'endomorphisme induit. Il faut formuler l'hypothèse pour tout endomorphisme, et non travailler avec les restriction de u.)

Supposons que $\dim(E)=n+1$. D'après Lemme 1, il existe un sous-espace P_1 de E de dimension 1 ou 2 et stable par u. D'après Lemme 2, $P_1^\perp$ est stable par u : on dispose alors de l'endomorphisme u_1 induit par u sur $P_1^\perp$ (u_1 est normal car u l'est). Comme $\dim(P_1^\perp)=n+1-\dim(P_1)\in[\![1,n]\!]$, par hypothèse de récurrence, il existe des sous-espaces $P_2,\dots,P_r$ de $P_1^\perp$ tels que $P_1^\perp=\bigoplus_{2\leq i\leq r}^{\perp}P_i$.
A fortiori, $E=\bigoplus_{1\leq i\leq r}^{\perp}P_i$. Les P_i, $2\leq i\leq r$, sont de dimension 1 ou 2 et sont stables par u_1, donc par u. //

Preuve du Lemme 4 : • Supposons que u a une valeur propre réelle λ_1. Soit $e_1\in E_{\lambda_1}(u)$ unitaire. D'après Lemme 2, $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u, mais $\dim((\mathbb{R}e_1)^\perp)=1$, donc u induit une homothétie sur $(\mathbb{R}e_1)^\perp$. Il existe donc $\lambda_2\in\mathbb{R}$ et $e_2\in E$ unitaire tels que $u(e_2)=\lambda_2e_2$. Ainsi, $\mathrm{Mat}_{(e_1,e_2)}(u)=\begin{pmatrix}\lambda_1 & 0\\ 0 & \lambda_2\end{pmatrix}$.

• Supposons que u n'admet pas de valeur propre réelle. Soit $A=\begin{pmatrix}a & c\\ b & d\end{pmatrix}$ la matrice de u dans une base orthonormée quelconque. Comme u est normal, on a ${}^tAA=A{}^tA$, donc :

$$\begin{pmatrix}a^2+b^2 & ac+bd\\ ac+bd & c^2+d^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a^2+c^2 & ab+cd\\ ab+cd & b^2+d^2\end{pmatrix}$$

ce qui nous donne $a^2+b^2=a^2+c^2$, donc $c=\pm b$. De plus, $ac+bd=ab+cd$, donc $(a-d)(b-c)=0$, donc $d=a$ ou $c=b$. Comme A n'a pas de valeur propre réelle, le discriminant de χ_A est strictement négatif, i.e. $\Delta=(a+d)^2-4(ad-bc)<0$. Si $c=b$, alors $\Delta=a^2+d^2+2ad-4ad+4b^2$ $=(a-d)^2+4b^2\geq 0$, ce qui n'est pas. Donc $c\neq b$: de là, $c=-b$ (en particulier $b\neq 0$) et $d=a$.

⚠ Faute de frappe Rombaldi

Donc $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u)=\begin{pmatrix}a & -b\\ b & a\end{pmatrix}$ //

<u>Preuve du théorème</u> : On procède par récurrence sur $n = \dim(E) \geq 1$.

- Si $n=1$, c'est immédiat, et si $n=2$, c'est Lemme 4.
- Soit $n \geq 2$, supposons le résultat prouvé pour tout endomorphisme normal$^{(*)}$ d'un espace euclidien de dimension $\leq n$. (*: même remarque que pour Lemme 3). Supposons E de dimension $n+1$.
  - Si u admet une valeur propre réelle λ_1, alors de même que dans Lemme 3, on choisit $e_1 \in E_{\lambda_1}(u)$ unitaire, et $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ est stable par u d'après Lemme 2. On note u_1 l'endomorphisme (normal) induit par u sur $(\mathbb{R}e_1)^\perp$. Par hypothèse de récurrence, il existe une base $\mathcal{B}_1$ de $(\mathbb{R}e_1)^\perp$ telle que, par blocs, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_1}(u_1) = \mathrm{Diag}(D_p, R_1, R_2, \dots, R_r)$, avec $D_p \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R})$ diagonale, et pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, $R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$, $(a_i, b_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$, et $p + 2r = \dim((\mathbb{R}e_1)^\perp) = n$. Alors $\mathcal{B} = \{e_1\} \cup \mathcal{B}_1$ est orthonormée, et $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(\lambda_1, D_p, R_1, R_2, \dots, R_r)$ par blocs.
  - Supposons que u n'admet aucune valeur propre réelle. D'après Lemme 3, il existe des sous-espaces $P_1, \dots, P_r$ de E de dimension 1 ou 2 — *a fortiori* 2 car u n'a pas de valeur propre réelle — stables par u tels que $E = \bigoplus_{1 \leq i \leq r} P_i$. Pour $i \in [\![1,r]\!]$, on note u_i l'endomorphisme (normal) induit par u sur P_i. D'après Lemme 4, pour tout $i \in [\![1,r]\!]$, pour toute base orthonormale $\mathcal{B}_i$ de P_i telle que $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}_i}(u_i) = R_i = \begin{pmatrix} a_i & -b_i \\ b_i & a_i \end{pmatrix}$ où $(a_i, b_i) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^*$. La famille $\mathcal{B} = \bigcup_{1 \leq i \leq r} \mathcal{B}_i$ est une base orthonormale de E telle que, par blocs, $\mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \mathrm{Diag}(R_1, \dots, R_p)$.

■

<u>Code couleurs</u> :

En bleu, j'ai ajouté quelques précisions par rapport au livre, qu'il est bienvenu, je pense, de préciser au moins oralement lors de la présentation.

En rouge, j'ai mis en garde contre certaines subtilités théoriques qu'on a vite fait d'oublier ou d'ignorer.

En orange j'ai signalé les erreurs dans mes sources.

<u>Remarques</u> :
- L'énoncé de tous les lemmes étant long, il peut être utile de les préciser dans le plan directement. Cependant, l'énoncé de tous les lemmes étant long, il vaut peut être mieux réserver cet espace à d'autres notions dans le plan. Les lemmes, dans l'ordre, découpent la démonstration, et permettent de voir la structure globale de la preuve, ce qui est bienvenu au début de la présentation.

- u est normal $\iff \forall x \in E, \|u(x)\| = \|u^*(x)\|$ (Rombaldi p758, exercice 22.24).

- Dans le cadre d'un espace hermitien, on peut montrer que u est normal si, et seulement si u est diagonalisable en base orthonormée (Gourdon Algèbre [3e édition] p270).

- Les endomorphismes (anti-)symétriques, les endomorphismes orthogonaux et les similitudes (composée d'une homothétie et d'une isométrie) sont normaux (Rombaldi p743). Ce théorème généralise le théorème spectral (réel).